



Física

I.3 Sistemas de coordenadas

En dos y tres dimensiones

ÍNDICE

TEMA I.I SISTEMAS DE COORDENADAS EN DOS Y TRES DIMENSIONES I

Bibliografía.....4

TEMA I.1 SISTEMAS DE COORDENADAS EN DOS Y TRES DIMENSIONES

La descripción matemática del movimiento de un objeto requiere un método para describir su posición al transcurrir el tiempo. En dos dimensiones esta descripción se logra con el uso del sistema de coordenadas cartesianas, en el que ejes perpendiculares cruzan en un punto definido como el origen, como se aprecia en la Figura 1.

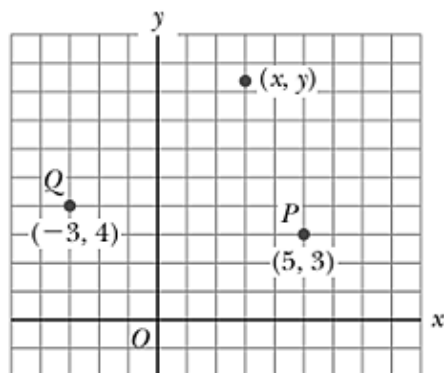


Figura 1. Designación de puntos en un sistema coordenado cartesiano. Cualquier punto se etiqueta con las coordenadas (x, y) .

Las coordenadas cartesianas también se llaman coordenadas rectangulares.

A veces es más conveniente representar un punto en un plano por sus coordenadas polares planas (r, θ) , como se muestra en la Figura 2.

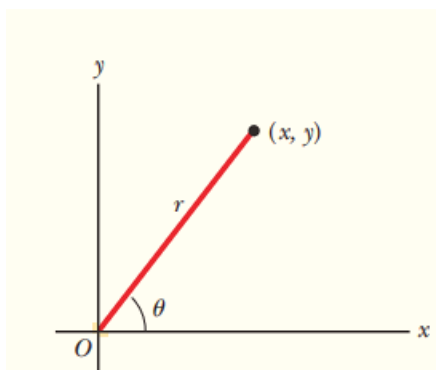


Figura 2. Las coordenadas polares planas de un punto se representan mediante la distancia r y el ángulo θ , donde θ se mide contra el sentido de las manecillas del reloj desde el eje x positivo.

En este sistema de coordenadas polares, r es la distancia desde el origen hasta el punto que tiene coordenadas cartesianas (x, y) y θ es el ángulo entre un eje fijo y una línea dibujada desde el origen hasta el punto. El eje fijo es el eje x positivo y θ se mide contra el sentido de las manecillas del reloj desde el mismo.

A partir del triángulo de la Figura 3 se encuentra que $\sin \theta = y/r$ y que $\cos \theta = x/r$. En consecuencia, si se tienen las coordenadas rectangulares de cualquier punto, al utilizar las siguientes ecuaciones, es posible obtener las coordenadas polares y viceversa.

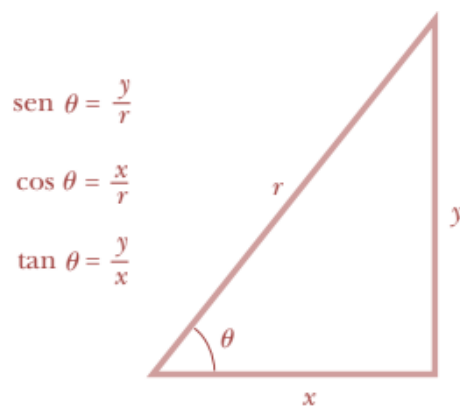


Figura 3. Se usa el triángulo rectángulo para relacionar (x, y) con (r, θ) .

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \text{ sen } \theta$$

Pero, además, por las definiciones de trigonometría tenemos que:

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

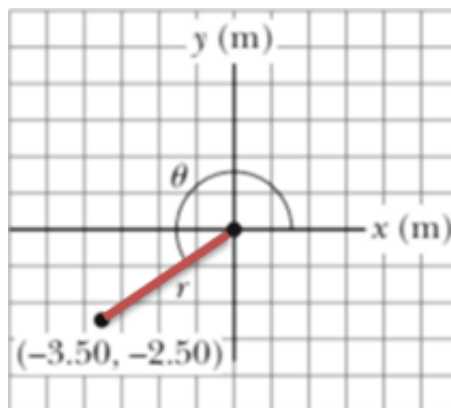
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (Teorema de Pitágoras)}$$

Ejemplo

Las coordenadas cartesianas de un punto en el plano x-y son $(-3.50, -2.50)$. Encuentren las coordenadas polares de este punto.

Solución.

Representando gráficamente, tenemos:



Aplicando la ecuación del teorema de Pitágoras

$$r = \sqrt{(-3.50)^2 + (-2.50)^2} = 4.30$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.50}{-3.50} = 0.714$$

$$\theta = 216^\circ$$

El sistema de coordenadas tridimensional se utiliza para representar superficies como elipsoides y conos elípticos. Este sistema trazando en el origen un eje z perpendicular al eje x y al eje y . La Figura 4 muestra la parte positiva de cada eje de coordenadas.

Tomados por pares, los ejes determinan tres planos coordenados: el plano xy , el plano xz y el plano yz . Estos tres planos coordenados dividen el espacio tridimensional en ocho octantes. El primer de ellos es en el que todas las coordenadas son positivas.

En este sistema tridimensional, un punto P en el espacio está determinado por una terna ordenada (x, y, z) donde x, y, z son: distancia dirigida que va del plano yz a P distancia dirigida que va del plano xz a P distancia dirigida que va del plano xy a P en la figura 4. se muestran varios puntos.

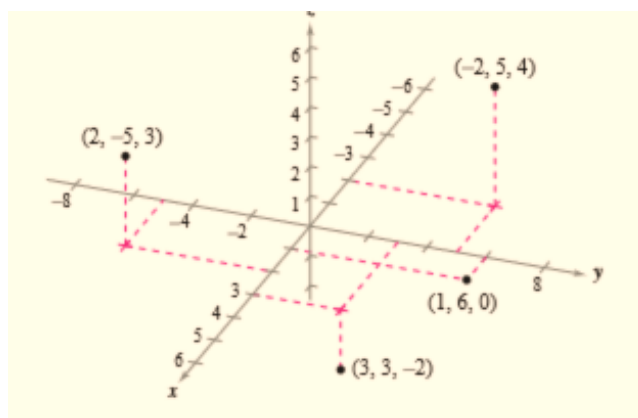
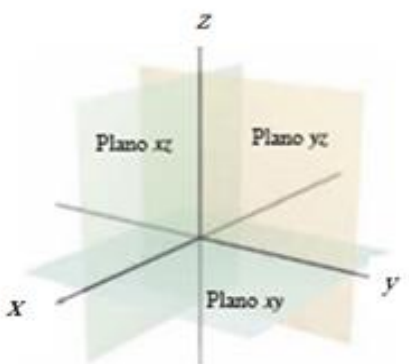


Figura 4. Representación de un vector en tres dimensiones

Muchas fórmulas establecidas para el sistema de coordenadas bidimensional pueden extenderse a tres dimensiones. Por ejemplo, para encontrar la distancia entre dos puntos en el espacio, se usa dos veces el teorema de Pitágoras, como se muestra en la Figura 5. Haciendo esto, se obtiene la fórmula de la distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

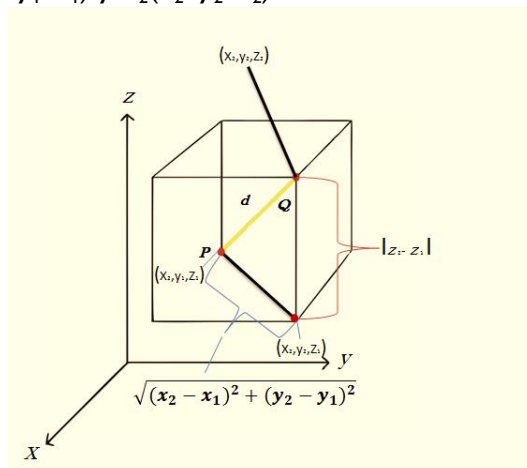


Figura 5. Teorema de Pitágoras para cálculo de distancias en 3D.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Ejemplo.

Cálculo de distancia entre dos puntos en el espacio.

Para encontrar la distancia entre los puntos $(2, -1, 3)$ y $(1, 0, -2)$, tenemos que:

$$d = \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 + 1)^2 + (-2 - 3)^2}$$

$$d = \sqrt{27}$$

$$d = 3\sqrt{3}$$

Ejemplo.

Ecuación de una esfera.

Hallar la ecuación canónica o estándar de la esfera que tiene los puntos $(5, -2, 3)$ y $(0, 4, -3)$ como extremos de un diámetro.

Solución:

De acuerdo a la regla del punto medio, el centro de la esfera es:

$$\left(\frac{5 + 0}{2}, \frac{-2 + 4}{2}, \frac{3 - 3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 1, 0\right)$$

Utilizando la fórmula de la distancia, el radio es:

$$r = \sqrt{\left(0 - \frac{5}{2}\right)^2 + (4 - 1)^2 + (-3 - 0)^2}$$

$$\sqrt{\frac{97}{4}} = \frac{\sqrt{97}}{2}$$

Por lo tanto, la ecuación canónica o estándar de la esfera es

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \frac{97}{4}$$

Bibliografía

Searway R. A., Jewett Jr., R. (2010). *Física Para Ciencias e Ingeniería*, Editorial Thomson Volumen I. Consultado el 17 de diciembre de 2020 de: https://oa.ugto.mx/oa/oa-enmssm-0000001/introduccion_al_al_geometra_analitica_en_el_espacio.html